3.8.4 Krácení lomených výrazů I

Předpoklady: 030803

Př. 1: Zkrať zlomky.

a) $\frac{12}{15}$ b) $\frac{24}{36}$ c) $\frac{21}{35}$ d) $\frac{48}{42}$ e) $\frac{64}{120}$ f) $\frac{128}{244}$

a) $\frac{12}{15}=\frac{3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{4}{5}$ b) $\frac{24}{36}=\frac{4\cdot 6}{6\cdot 6}=\frac{4}{6}$ c) $\frac{21}{35}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{3}{5}$

d) $\frac{48}{42}=\frac{8\cdot 6}{7\cdot 6}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$ e) $\frac{64}{120}=\frac{8\cdot 8}{4\cdot 30}=\frac{4\cdot 2\cdot 8}{4\cdot 2\cdot 15}=\frac{8}{15}$

f) $\frac{128}{244}=\frac{4\cdot 32}{4\cdot 61}=\frac{32}{61}$

Př. 2: Jsou lomené výrazy $\frac{2}{k+1}$ a $\frac{2k}{k^2+k}$ shodné? Proč?

Zkusíme dosazovat:

- $k=1$
  - $\frac{2}{k+1}=\frac{2}{1+1}=1$,
  - $\frac{2k}{k^2+k}=\frac{2\cdot 1}{1^2+1}=\frac{2}{2}=1$.
- $k=10$
  - $\frac{2}{k+1}=\frac{2}{10+1}=\frac{2}{11}$,
  - $\frac{2k}{k^2+k}=\frac{2\cdot 10}{100+10}=\frac{20}{110}=\frac{2}{11}$.
- $k=-2$
  - $\frac{2}{k+1}=\frac{2}{-2+1}=\frac{2}{-1}=-2$,
  - $\frac{2k}{k^2+k}=\frac{2\cdot(-2)}{(-2)^2+(-2)}=\frac{-4}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2$.
- $k=0$
  - $\frac{2}{k+1}=\frac{2}{0+1}=2$,
  - $\frac{2k}{k^2+k}=\frac{2\cdot 0}{0^2+0}=\frac{0}{0}$ - nemá smysl.

Kromě nuly nám po dosazení vyjdou vždy stejné hodnoty $\Rightarrow$ jeden výraz zřejmě musí jít převést na druhý (druhý výraz je prvnímu velmi podobný, jen je všechno vynásobeno neznámou k).

$\frac{2k}{k^2+k}=\frac{k\cdot 2}{k(k+1)}=\frac{2}{k+1}$ - provedli jsme krácení neznámé *k* jako u normálních zlomků.

Proč to nefunguje u nuly?

Lomený výraz $\frac{2}{k+1}$ má jedinou podmínku $k\neq -1$.

Lomený výraz $\frac{2k}{k^2+k}$ má podmínky dvě $k\neq -1$ a $k\neq 0$.

Výrazy $\frac{2}{k+1}$ a $\frac{2k}{k^2+k}$ nejsou shodné, přestože druhý výraz můžeme krácením převést na výraz první, protože nemají stejný definiční obor.

Pedagogická poznámka: K tomu, že výrazy jsou stejné dojdou všichni (většina dosazováním), někteří si všimnou i toho, že do nezkráceného výrazu nejde dosadit nula. Jen část žáků pochopí úpravu jako krácení, většina jen vidí, že ve zkráceném výrazu chybí nahoře i dole *k*. Pro ně stojí za to ukázat úpravu i při dosazení konkrétního čísla za *k* (třeba $k=3$).

Podobně jako můžeme krácením zjednodušovat zlomky $\frac{12}{15}=\frac{3\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{4}{5}$, můžeme krácením zjednodušovat i lomené výrazy $\frac{2k}{k^2+k}=\frac{k\cdot 2}{k(k+1)}=\frac{2}{k+1}$.

Výchozí výraz však není shodný s konečným, pokud nemají stejné definiční obory.

Krácení lomeného výrazu můžeme provést pouze v případě, že výraz dokážeme upravit na tvar $\frac{(\textit{krácený výraz})\cdot(\textit{libovolný výraz }1)}{(\textit{krácený výraz})\cdot(\textit{libovolný výraz }2)}=\frac{(\textit{libovolný výraz }1)}{(\textit{libovolný výraz }2)}$.

Př. 3: Zkrať lomené výrazy.

a) $\frac{15a}{20b^2}$ b) $\frac{x^2y}{xy^2}$ c) $\frac{x+1}{3x+3}$ d) $\frac{x-1}{x^2-1}$

a) $\frac{15a}{20b^2}=\frac{5\cdot 3a}{5\cdot 4b^2}=\frac{3a}{4b^2}$, $b\neq 0$

b) $\frac{x^2y}{xy^2}=\frac{xy\cdot x}{xy\cdot y}=\frac{x}{y}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$

c) $\frac{x+1}{3x+3}=\frac{x+1}{3(x+1)}=\frac{1}{3}$, $x\neq -1$

d) $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}$, $x\neq \pm 1$

Pedagogická poznámka: První dva body jsou bez problémů. Naopak druhé dva jsou správně jen výjimečně. Nejčastější chybou v bodu c) je $\frac{x+1}{3x+3}=\frac{\cancel{x}+1}{\cancel{x}+2x+3}=\frac{1}{2x+3}$ ("krácení" ze součtu), v bodu d) pak $\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{x\cdot x-1}=\frac{-1}{x-1}$ ("krácení“ z polovičního součtu). V bodu c) říkám žákům, že správný výsledek je zřejmý z porovnání čitatele a jmenovatele (jmenovatel je třikrát menší, proto musí být hodnota zlomku $\frac{1}{3}$). Že je jejich řešení špatné si pak ukazujeme i dosazením čísla za proměnnou ($\frac{x+1}{3x+3}=\frac{x+1}{x+2x+3}=\frac{10+1}{10+2\cdot 10+3}$), kde by číslo 10 nikdo nekrátil. Podobně postupujeme i u bodu d).

Př. 4: Zkrať lomené výrazy.

a) $\frac{a^3b^2c}{a^2b^3c^2}$ b) $\frac{15xy}{25x^2}$ c) $\frac{3a^2}{9a^3b}$ d) $\frac{28x^7y^3}{42x^5y^6}$ e) $\frac{a^2b^3c}{(abc)^2}$

a) $\frac{a^3b^2c}{a^2b^3c^2}=\frac{a}{bc}$ (podrobněji: $\frac{a^3b^2c}{a^2b^3c^2}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{c}}{\cancel{a}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}\cdot b\cdot\cancel{c}\cdot c}=\frac{a}{bc}$)

$a\neq 0; b\neq 0; c\neq 0$

b) $\frac{15xy}{25x^2}=\frac{5\cdot 3xy}{5\cdot 5x^2}=\frac{3y}{5x}$ (podrobněji $\frac{15xy}{25x^2}=\frac{\cancel{5}\cdot 3\cdot\cancel{x}\cdot y}{\cancel{5}\cdot 5\cdot\cancel{x}\cdot x}=\frac{3y}{5x}$)

$x\neq 0$

c) $\frac{3a^2}{9a^3b}=\frac{3a^2}{3\cdot 3a^3b}=\frac{1}{3ab}$

$a\neq 0; b\neq 0$

d) $\frac{28x^7y^3}{42x^5y^6}=\frac{7\cdot 4\cdot x^2}{7\cdot 6\cdot y^3}=\frac{2\cdot 2\cdot x^2}{2\cdot 3\cdot y^3}=\frac{2x^2}{3y^3}$

$x\neq 0;\ y\neq 0$

e) $\frac{a^2b^3c}{(abc)^2}=\frac{a^2b^3c}{a^2b^2c^2}=\frac{b}{c}$

$a\neq 0; b\neq 0; c\neq 0$

Pedagogická poznámka: V učebnici jsou první dva příklady rozepsány, u žáků se snažím, aby rozepisování neprováděli (pouze v případech, kdy si nejsou jisti).

Př. 5: Najdi lomený výraz, ve kterém můžeme vykrátit mnohočlen s proměnou a přesto získáme shodný lomený výraz.

Příklad 2: $\frac{2k}{k^2+k}=\frac{k\cdot 2}{k(k+1)}=\frac{2}{k+1}$ - u nezkráceného výrazu byla navíc podmínka $k\neq 0$, která u vykráceného výrazu není $\Rightarrow$ musíme krátit výraz, který se nikdy nerovná nule (z něho nebude vyplývat žádná podmínka).

Možný výraz na krácení: x^2+1 (místo 1 můžeme napsat libovolné kladné číslo).

Zkrácený výraz pak může být zcela libovolný.

Hledaný výraz je například: $\frac{2x^2+2}{x^3+x}=\frac{2(x^2+1)}{x(x^2+1)}=\frac{2}{x}$, podmínka $x\neq 0$.

Dodatek: Více podobných výrazů bychom mohli zapsat pomocí parametru (další proměnné) například takto: $\frac{2x^2+2k}{x^3+xk}=\frac{2\left(x^2+k\right)}{x\left(x^2+k\right)}=\frac{2}{x}$, $k>0$.

Shrnutí: Pokud je čitatel i jmenovatel lomeného výrazu vynásobený stejným výrazem, můžeme tento výraz zkrátit (krátí se jen přes násobení).